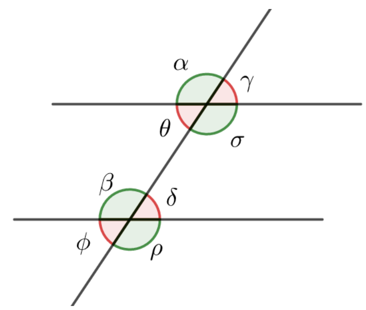
# Entrenamientos Regionales 2019
# OMM CHIAPAS
# *GEOMETRÍA*

## 1. Ángulos entre paralelas

***Cuando se tienen dos líneas paralelas y una recta que corta a ambas se cumplen ciertas igualdades de ángulos que son***

| | |
|---|---|
| Ángulos opuestos por el vértice | $\alpha = \sigma$, |
| Ángulos correspondientes | $\alpha = \beta$, |
| Ángulos alternos externos | $\alpha = \rho$, |
| Ángulos alternos internos | $\beta = \sigma$. |




Además observamos que $\alpha+\gamma = 180°$, es decir, son suplementarios.

***Recíprocamente, si se tienen dos rectas cortadas por una transversal y los ángulos correspondientes son iguales entonces las rectas son paralelas.***

**Resultados generales:**

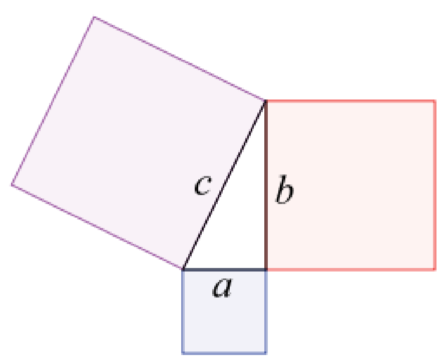
1. La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.
2. En general, la suma de los ángulos internos de un polígono de $n$ lados es $180°(n-2)$.
3. En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales. Recíprocamente, si dos ángulos son iguales entonces los lados que subtienden son iguales.

## 2. Teorema de Pitágoras

***En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.***

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cabe recalcar que el enunciado recíproco también es cierto, esto es:




***Si en un triángulo se cumple la relación entre los lados $a^2 + b^2 = c^2$, entonces es un triángulo rectángulo.***

## 3. Congruencia de triángulos

**Definición.** Se dice que dos triángulos $ABC$ y $DEF$ son congruentes si los lados y ángulos correspondientes son iguales. Esto es si se cumplen las siguientes 6 igualdades:

$$AB = DE, BC = EF, CA = FD, \angle ACB = \angle DFE, \angle ABC = \angle DEF \text{ y } \angle BAC = \angle EDF.$$

La congruencia de triángulos se denota como $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Afortunadamente, no es necesario corroborar las 6 igualdades anteriores para ver que dos triángulos son congruentes, sino que basta con solo tres:

1. *Criterio LAL.* Si dos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre estos lados igual al correspondiente, entonces los triángulos son congruentes.

2. *Criterio LLL.* Si dos triángulos tienen sus tres lados iguales, entonces son congruentes.

3. *Criterio ALA.* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado comprendido entre estos ángulos también igual, entonces son congruentes.

**Ejemplo.** Sea $ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea $L$ un punto en el segmento $BC$, muestra que:

I) Si $L$ es punto medio de BC entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

II) Si $AL$ es perpendicular a BC entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

III) Si $AL$ divide al ángulo $\angle BAC$ en dos ángulos iguales entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

**Solución.**

I) Por el criterio LLL de congruencia se sigue que $\Delta ALB \cong \Delta ALC$ ya que $AB = AC$, $BL = CL$ y $AL$ es común. Esto nos dice además que $\angle ALB = 90° = \angle ALC$ y que $AL$ divide al $\angle BAC$ en dos ángulos iguales.
La demostración de II) y III) se deja como ejercicio.

## 4. Semejanza de triángulos

**Definición.** Dos triángulos $ABC$ Y $DEF$ son semejantes si tienen sus tres lados correspondientes proporcionales y sus tres ángulos correspondientes iguales, es decir, si

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad \text{y} \quad \angle ACB = \angle DFE, \angle ABC = \angle DEF, \angle BAC = \angle EDF.$$

Dos triángulos semejantes se denotan por $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y a la proporción que guardan los lados se llama razón de semejanza.

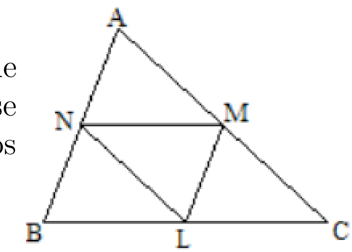
De nuevo tenemos tres criterios de semejanza parecidos a los de las congruencias:

1. *Criterio AA.* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales entonces son semejantes.

2. *Criterio LAL.* Si dos pares de lados correspondientes de dos triángulos guardan la misma proporción y el ángulo comprendido entre estos lados es igual al correspondiente, entonces los triángulos son semejantes.

3. *Criterio LLL.* Si los tres pares de lados correspondientes de dos triángulos guardan la misma proporción entonces los triángulos son semejantes.

**Ejemplo.** En un triángulo $ABC$, sean $L$, $M$ y $N$ los puntos medios de los lados $BC$, $CA$ y $AB$ respectivamente. Uniendo los puntos medios se forman cuatro triángulos pequeños, muestra que los cuatro triángulitos son congruentes entre sí y semejantes al original en razón 1:2.




**Solución.** Vamos a ver primero que los triángulos ANM y ABC son semejantes en razón 1:2. Tenemos que los lados correspondientes guardan la misma proporción pues

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2},$$

además tienen el ángulo en $A$ común, luego por el criterio de semejanza $LAL$ se tiene que $\Delta ANM \sim \Delta ABC$. De aquí también podemos concluir entonces que $\angle ABC = \angle ANM$, $\angle ACB = \angle AMN$ y $\dfrac{NM}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

De manera análoga se puede demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta MLC$ y $\Delta ABC \sim \Delta NBL$. Se deja como ejercicio al lector escribir explícitamente el razonamiento y sus conclusiones.

Ahora demostraremos que $\Delta LMN \sim \Delta ABC$. Ya sabemos de las semejanzas anteriores que

$$\frac{LM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{NL}{CA} = \frac{1}{2}.$$

Y por el criterio LLL se tiene entonces que $NML$ es semejante a $ABC$ en razón $1:2$. Ahora ya es fácil concluir que los 4 triangulitos son congruentes entre sí ¿por qué?$\square$

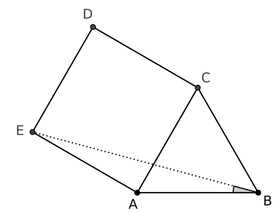
# 5. Áreas

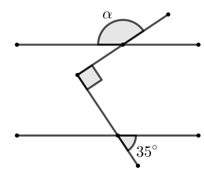
Recuerda que el área de un triángulo es base×altura/2. Esto tiene las siguientes consecuencias que parecieran inocentes pero son bastante útiles en la resolución problemas.

- Si dos triángulos tienen la misma base entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas.
- Si dos triángulos tienen la misma altura entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.
- Si dos triángulos son semejantes entonces la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

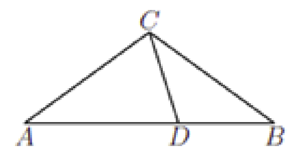
# 6. Problemas

1. Sobre el lado $AC$ de un triángulo equilátero $ABC$ se dibuja un cuadrado $ACDE$ como se muestra en la figura. ¿Cuánto midel el ángulo $\angle ABE$?



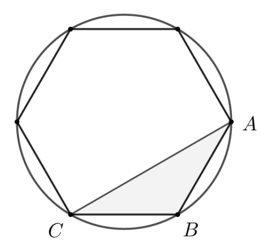




2. De acuerdo a la figura, ¿cuánto mide el ángulo $\alpha$?

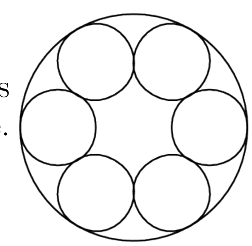



3. En la siguiente figura se observan 3 triángulos isósceles, es decir, $AC = BC$, $AC = AD$ y $DC = DB$, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle ACB$?

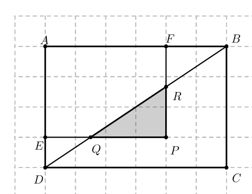
4. Todos los ángulos interiores de un polígono convexo son menores que 160°. El número de lados de ese polígono puede ser a lo más:



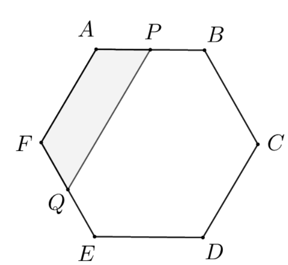

5. En la figura se muestra un hexágono regular dentro de un círculo de área $4\pi$. ¿Cuál es el área del triángulo $ABC$?



6. En la figura el círculo grande tiene radio igual a 12 cm. Los círculos pequeños son idénticos entre sí y son tangentes a sus dos vecinos y al círculo grande. Encuentra la medida del radio de los círculos pequeños.

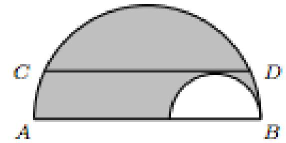



7. En la figura cada cuadrito mide 1 cm $\times$ 1 cm. Calcula el área sombreada:

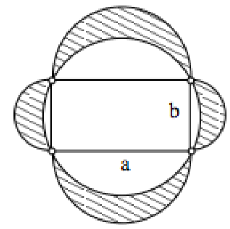



8. Considera un hexágono regular $ABCDEF$, sean $P$ el punto medio de $AB$ y $Q$ el punto medio de $EF$. ¿Cuánto vale la razón $\dfrac{\text{Área}(APQF)}{\text{Área}(ABCDEF)}$?

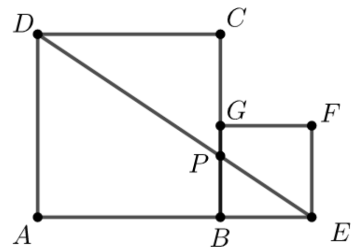
9. Los semicírculos de la figura tienen su centro sobre $AB$. Sabiendo que el segmento $CD$ es paralelo a $AB$ y que $CD = 24$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



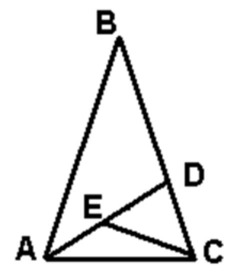

10. Se tiene un rectángulo de lados $a$ y $b$, en cada lado del rectángulo se construyen semicirculos hacia afuera del rectángulo, luego se construye el circuncirculo del recángulo como se muestra en la figura.
¿Cuál es el valor del área sombreada en términos de $a$ y de $b$?



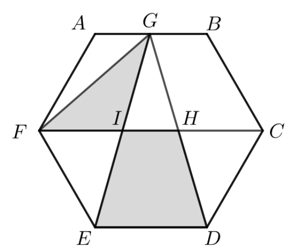

11. En la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 2 y $BEFG$ es un cuadrado de lado 1. El punto $P$ es la intersección de $DE$ con $BG$. ¿Cuánto mide $GP$?



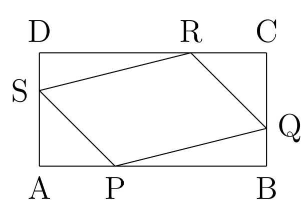

12. El triángulo $ABC$ es isósceles con $AB = BC$. Los triángulos $ADC$ y $DEC$ también son isósceles con $AD = AC$ y $ED = DC$. Si $\angle DAB = 30°$, ¿cuánto mide $\angle DEC$?




13. En la figura $ABCDEF$ es un hexágono regular de área 2016, y $G$ es el punto medio del lado $AB$. Calcula el área sombreada




14. Los puntos $P, Q, R$ y $S$ dividen a los lados del rectángulo $ABCD$ en razón $1 : 2$ como indica la figura. ¿A qué es igual el área $(PQRS)$ del paralelogramo $PQRS$?




15. En la figura, el cuadrilátero $ABCD$ tiene un área de 5 $\text{cm}^2$. Si se sabe que $AB = BA'$, $BC = CB'$, $CD = DC'$ y $DA = AD'$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $A'B'C'D'$?